第 10 回：不均一分散
【教科書第 7 章第 4 節～第 5 節】

北村　友宏

2025 年 12 月 2 日

本日の内容

1. 一般化線形回帰モデル

2. 不均一分散の検定
    2.1. Breusch-Pagan 検定
    2.2. White 検定

古典的線形回帰モデル

y_i を x_i に単回帰することを考える．これまでに登場した線形回帰モデル

$$
\begin{aligned}
y_i &= \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i, \\
E(u_i \mid x_i) &= 0, \\
E(u_i u_j \mid x_i) &= 0 \quad (i \neq j), \\
V(u_i \mid x_i) &= \sigma^2, \\
i &= 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
$$

は，古典的線形回帰モデル．

$$\Downarrow$$

誤差項 u_i の条件付き分散が一定．

一般化線形回帰モデル

ここで，誤差項 u_i の条件付き分散が，個体によって異なる（一定でない）と仮定する．

単回帰の場合，$V(u_i \mid x_i)$ が一定でないとした一般化線形回帰モデル（Generalized Linear Regression Model）は，

$$
\begin{aligned}
y_i &= \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i, \\
E(u_i \mid x_i) &= 0, \\
E(u_i u_j \mid x_i) &= 0 \quad (i \neq j), \\
V(u_i \mid x_i) &= \sigma_i^2, \\
i &= 1, 2, \cdots, n.
\end{aligned}
$$

重回帰の場合の古典的線形回帰モデルと一般化線形回帰モデル

- 重回帰の場合の古典的線形回帰モデルは，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}, \\ E(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{X}) &= \boldsymbol{0}, \\ V(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{X}) &= \sigma^2 \boldsymbol{I}_n. \end{aligned}$$

- 重回帰の場合の一般化線形回帰モデル（Generalized Linear Regression Model）は，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}, \\ E(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{X}) &= \boldsymbol{0}, \\ V(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{X}) &= \boldsymbol{\Sigma}. \end{aligned}$$

不均一分散

- $V(u_i \mid x_i)$ が一定でないことを（条件付き）不均一分散（heteroskedasticity）という．
  - e.g., 年収を修学年数に回帰するモデルにおいて，修学年数（学歴）によって個人の能力のばらつきが異なり，それが年収のばらつきの違いを引き起こす，など．
- 不均一分散があると，$V(u_i \mid x_i)$ が一定であると仮定して計算したデフォルトの標準誤差が正しくないため，それを用いて計算した検定統計量による仮説検定を正しく実行できない．

頑健標準誤差

- $V(u_i \mid x_i)$ が一定であることや $E(u_i u_j \mid x_i)$ が 0 であることを仮定せずに求める標準誤差を頑健標準誤差（robust standard error）という．
- 不均一分散があっても，（古典的線形回帰モデルを推定して）頑健標準誤差を計算すれば，標準誤差をより厳密に求め，仮説検定をより厳密に行うことができる．
- gretl では，例えば White の頑健標準誤差などを出力できる．
  - 「gretl: モデル推定」ダイアログボックスの，「頑健標準誤差を使用する」をチェックすればよい．

- 経済学分野の実証分析では，誤差項 u_i に不均一分散があることを前提として頑健標準誤差を計算する場合が多い．
- 頑健標準誤差のほうがデフォルトの標準誤差より大きくなることもあれば，小さくなることもある．

二乗項を含むミンサー方程式の推定

年齢によって 1 年働くことによる年収の増え方が異なることをコントロールしたうえで，「修学年数が増えると，年収がどれだけ増えるのか」を分析するためのモデル（ミンサー方程式）

$$\ln income_i = \beta_0 + \beta_Y yeduc_i + \beta_E exper_i + \beta_{EE} exper_i^2 + u_i$$

- $income_i$：年収（万円）
- $yeduc_i$：修学年数（年）
- $exper_i$：就業可能年数（年）
- i：個人番号

を推定する．

➡ 「年収の対数値」を「修学年数」と「就業可能年数」と「就業可能年数の 2 乗」に回帰する．

- 就業可能年数
  - 最後の学校を卒業してからの年数

$$\text{就業可能年数} = \text{年齢} - \text{修学年数} - 6.$$

※ 小学校に入学する年齢が 6 歳のため，6 を引いている.

  - 熟練度を表す.
    ⇒ 賃金に影響を与える.

$$\Downarrow$$

修学年数が年収に与える純粋な効果を計測するには，熟練度（を表す就業可能年数) をコントロールする必要がある.

ミンサー方程式の推定結果（デフォルトの標準誤差を用いた場合）

gretl: モデル1

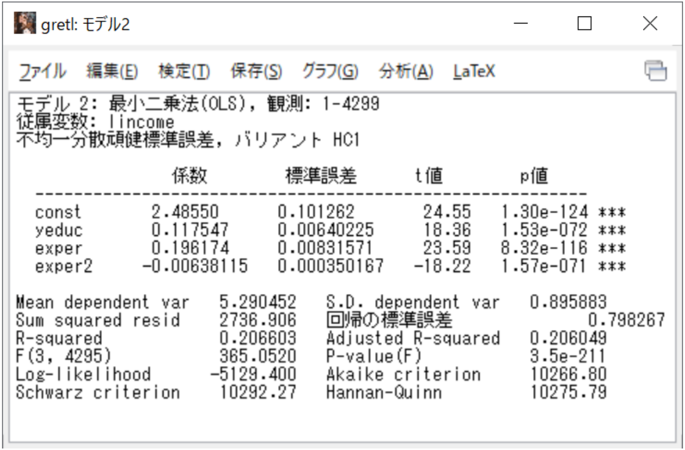
ファイル　編集(E)　検定(T)　保存(S)　グラフ(G)　分析(A)　LaTeX

```
モデル 1: 最小二乗法(OLS), 観測: 1-4299
従属変数: lincome

                係数          標準誤差        t値          p値
  ---------------------------------------------------------------
  const        2.48550       0.110782        22.44     1.64e-105 ***
  yeduc        0.117547      0.00706026      16.65     2.31e-060 ***
  exper        0.196174      0.00749354      26.18     2.75e-140 ***
  exper2      -0.00638115    0.000316188    -20.18     1.32e-086 ***

Mean dependent var   5.290452   S.D. dependent var   0.895883
Sum squared resid    2736.906   回帰の標準誤差             0.798267
R-squared            0.206603   Adjusted R-squared   0.206049
F(3, 4295)           372.8097   P-value(F)           3.4e-215
Log-likelihood      -5129.400   Akaike criterion     10266.80
Schwarz criterion    10292.27   Hannan-Quinn         10275.79
```

ミンサー方程式の推定結果（頑健標準誤差を用いた場合）



gretl: モデル2

ファイル 編集(E) 検定(T) 保存(S) グラフ(G) 分析(A) LaTeX

モデル 2: 最小二乗法(OLS), 観測: 1-4299
従属変数: lincome
不均一分散頑健標準誤差, バリアント HC1

	係数	標準誤差	t値	p値	
const	2.48550	0.101262	24.55	1.30e-124	***
yeduc	0.117547	0.00640225	18.36	1.53e-072	***
exper	0.196174	0.00831571	23.59	8.32e-116	***
exper2	−0.00638115	0.000350167	−18.22	1.57e-071	***

Mean dependent var	5.290452	S.D. dependent var	0.895883
Sum squared resid	2736.906	回帰の標準誤差	0.798267
R-squared	0.206603	Adjusted R-squared	0.206049
F(3, 4295)	365.0520	P-value(F)	3.5e-211
Log-likelihood	−5129.400	Akaike criterion	10266.80
Schwarz criterion	10292.27	Hannan-Quinn	10275.79

ミンサー方程式の推定結果

デフォルトの標準誤差を用いた場合と頑健標準誤差を用いた場合では，

- 偏回帰係数推定値は同じ．
- 標準誤差が異なっていて，それに伴い，t 値や p 値が異なっている．

不均一分散の検定

定数項以外に説明変数が 2 つある重回帰モデル

$$
\begin{aligned}
y_i &= \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + u_i, \\
E(u_i \mid x_{1i}, x_{2i}) &= 0, \\
E(u_i u_j \mid x_{1i}, x_{2i}) &= 0 \quad (i \neq j), \\
i &= 1, 2, \cdots, n.
\end{aligned}
$$

を考える．このモデルにおいて，

$$
V(u_i \mid x_{1i}, x_{2i}) = \sigma^2 \quad \text{（均一分散）}
$$

なのか

$$
V(u_i \mid x_{1i}, x_{2i}) = \sigma_i^2 \quad \text{（不均一分散）}
$$

なのかを検定したい．

ここで,

$$V(u_i \mid x_{1i}, x_{2i}) = E(u_i^2 \mid x_{1i}, x_{2i}) \quad \text{（証明は省略）.}$$

$$\Downarrow$$

$E(u_i^2 \mid x_{1i}, x_{2i})$ は，x_{1i} と x_{2i} を所与とした u_i^2 の条件付き期待値で，それは u_i^2 を x_{1i} と x_{2i} に回帰して求めるもの.

$$\Downarrow$$

u_i^2 を x_{1i} と x_{2i} に回帰して，「x_{1i} と x_{2i} の偏回帰係数がすべて（両方とも）0」を H_0 とする検定を行い，H_0 が棄却されれば $V(u_i \mid x_{1i}, x_{2i})$ が x_{1i} と x_{2i} の少なくとも 1 つに依存して一定でない不均一分散となり，H_0 が採択されれば $V(u_i \mid x_{1i}, x_{2i})$ が x_{1i} や x_{2i} に依存するとはいえず，不均一分散とはいえないことになる.

$$\Downarrow$$

ただ，誤差項の 2 乗 u_i^2 は未知で，観測できない…

$$\Downarrow$$

誤差項の 2 乗 u_i^2 の代わりに，残差の 2 乗 e_i^2 を用いればよい．

Breusch-Pagan 検定

- 仮説検定のための補助的な回帰を補助回帰（auxiliary regression）という．
- 残差の 2 乗を元のモデルのすべての説明変数に補助回帰し，それの定数項を除くすべての説明変数の（偏）回帰係数が 0 であることを帰無仮説とする検定を Breusch-Pagan 検定（Breusch-Pagan test）という．

定数項以外に説明変数が 2 つある重回帰モデルにおいて，Breusch-Pagan 検定を行う手順は，

1. y_i を x_{1i} と x_{2i} に回帰する．すなわち

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + u_i$$

   を推定する．そして残差 e_i を求める．

2. e_i^2 を x_{1i} と x_{2i} に補助回帰する．すなわち

$$e_i^2 = \gamma_0 + \gamma_1 x_{1i} + \gamma_2 x_{2i} + v_i$$

   を推定する．

3. 補助回帰の偏回帰係数について，

$$H_0 : \gamma_1 = 0 \ \text{ and } \ \gamma_2 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \gamma_1 \neq 0 \ \text{ or } \ \gamma_2 \neq 0$$

   を F 検定またはカイ二乗検定により検定し，
   H_0 の採択・棄却を判断する．

Breusch-Pagan 検定において，

$$H_0 : \gamma_1 = 0 \text{ and } \gamma_2 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \gamma_1 \neq 0 \text{ or } \gamma_2 \neq 0$$

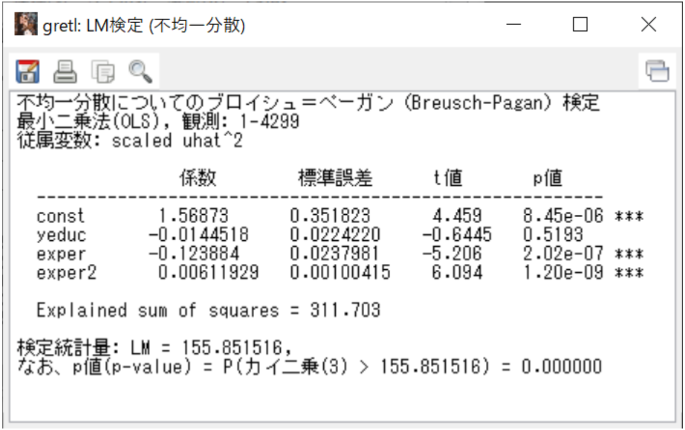
の H_0 と H_1 の意味は，

- 帰無仮説：γ_1, γ_2 がどちらもゼロ．
  - 誤差項 u_i は，$V(u_i \mid x_{1i}, x_{2i})$ が x_{1i} にも x_{2i} にも依存しない，一定の均一分散をもつ．
- 対立仮説：γ_1, γ_2 のうち少なくとも 1 つはゼロでない．
  - 誤差項 u_i は，$V(u_i \mid x_{1i}, x_{2i})$ が x_{1i} と x_{2i} の少なくとも 1 つに依存する，一定でない不均一分散をもつ．

gretl で Breusch-Pagan 検定を実行する方法

- モデルを推定した後，結果ウィンドウの「検定」→「不均一分散」→「Breusch-Pagan」と操作すれば実行できる．
- モデルを推定する際，「頑健標準誤差を使用する」にチェックを入れても入れなくてもよい．
- gretl ではカイ二乗検定が行われる．

ミンサー方程式の Breusch-Pagan 検定結果




```
不均一分散についてのブロイシュ=ペーガン (Breusch-Pagan) 検定
最小二乗法(OLS), 観測: 1-4299
従属変数: scaled uhat^2

             係数          標準誤差       t値         p値
  ---------------------------------------------------------
  const      1.56873       0.351823      4.459     8.45e-06 ***
  yeduc     -0.0144518     0.0224220    -0.6445    0.5193
  exper     -0.123884      0.0237981    -5.206     2.02e-07 ***
  exper2     0.00611929    0.00100415    6.094     1.20e-09 ***

  Explained sum of squares = 311.703

検定統計量: LM = 155.851516,
なお、p値(p-value) = P(カイ二乗(3) > 155.851516) = 0.000000
```

- 検定統計量の実現値は 155.851516, p 値は 0.
  ➥ 仮に「誤差項の条件付き分散が一定（均一分散をもつ）」だとすると，155.851516 という検定統計値は（ほぼ）0%の確率（1%を下回る確率）でしか出てこない.
  ➥ 有意水準 1%で,「誤差項の条件付き分散が一定（均一分散をもつ）」の H_0 が棄却される（5%や 10%でも棄却される）.
  ➥ 誤差項の条件付き分散が一定でなく，不均一分散をもつと判断される.

White 検定

- 残差の 2 乗を元のモデルのすべての説明変数の 1 乗，2 乗，および説明変数同士の積に補助回帰し，それの定数項を除くすべての説明変数の偏回帰係数が 0 であることを帰無仮説とする検定を White 検定（White test）という．

定数項以外に説明変数が 2 つある重回帰モデルにおいて，White 検定を行う手順は,

1. y_i を x_{1i} と x_{2i} に回帰する．すなわち

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + u_i$$

を推定する．そして残差 e_i を求める．

2. e_i^2 を $x_{1i}, x_{2i}, x_{1i}^2, x_{2i}^2, x_{1i}x_{2i}$ に補助回帰する．すなわち

$$e_i^2 = \gamma_0+\gamma_1 x_{1i}+\gamma_2 x_{2i}+\gamma_{11} x_{1i}^2+\gamma_{22} x_{2i}^2+\gamma_{12} x_{1i} x_{2i}+v_i$$

を推定する．

3. 補助回帰の偏回帰係数について，

$$\begin{aligned} H_0 &: (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{12})' = (0, 0, 0, 0, 0)' \\ \text{vs} \quad H_1 &: (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{12})' \neq (0, 0, 0, 0, 0)' \end{aligned}$$

を F 検定またはカイ二乗検定により検定し，H_0 の採択・棄却を判断する．

White 検定において，

$$H_0 : (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{12})' = (0, 0, 0, 0, 0)'$$
$$\text{vs} \quad H_1 : (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{12})' \neq (0, 0, 0, 0, 0)'$$

の H_0 と H_1 の意味は，

- 帰無仮説：$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{12}$ がすべてゼロ．
  - 誤差項 u_i の条件付き分散が一定（均一分散）．
- 対立仮説：$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{12}$ のうち少なくとも 1 つはゼロでない．
  - 誤差項 u_i の条件付き分散が一定でない（不均一分散）．

gretl で White 検定を実行する方法

- モデルを推定した後，結果ウィンドウの「検定」→「不均一分散」→「ホワイト (White) の検定」と操作すれば実行できる．
- モデルを推定する際，「頑健標準誤差を使用する」にチェックを入れても入れなくてもよい．
- gretl ではカイ二乗検定が行われる．

ミンサー方程式の White 検定結果

gretl: LM検定 (不均一分散)

```
不均一分散についてのホワイト (White) の検定
最小二乗法(OLS), 観測: 1-4299
従属変数: uhat^2
完全な共線性のため次の変数を取り除きました: sq_exper

                  係数          標準誤差        t値        p値
  ---------------------------------------------------------------
  const        -2.23162        1.69030       -1.320     0.1868
  yeduc         0.397685       0.213030       1.867     0.0620  *
  exper         0.0223934      0.194375       0.1152    0.9083
  exper2        0.0114230      0.0135846      0.8409    0.4005
  sq_yeduc     -0.0115175      0.00734952    -1.567     0.1172
  X2_X3        -0.0155769      0.0121301     -1.284     0.1992
  X2_X4         0.000551679    0.000534168    1.033     0.3018
  X3_X4        -0.000638885    0.000767875   -0.8320    0.4054
  sq_exper2     7.44780e-06    1.67241e-05    0.4453    0.6561

  Unadjusted R-squared = 0.016040

検定統計量: TR^2 = 68.954503,
なお、p値(p-value) = P(カイ二乗(8) > 68.954503) = 0.000000
```

- 検定統計量の実現値は 68.954503, p 値は 0.
  ➡ 仮に「誤差項の条件付き分散が一定（均一分散）」だとすると，68.954503 という検定統計値は（ほぼ）0%の確率（1%を下回る確率）でしか出てこない.
  ➡ 有意水準 1%で,「誤差項の条件付き分散が一定（均一分散）」の H_0 が棄却される（5%や10%でも棄却される）.
  ➡ 誤差項の条件付き分散が一定でなく，不均一分散をもつと判断される.

Breusch-Pagan 検定と White 検定

- ミンサー方程式の例では，Breusch-Pagan 検定と White 検定で同じ判断が下された．
- ただし，Breusch-Pagan 検定と White 検定で異なる判断が下される場合もある．

今日のキーワード

一般化線形回帰モデル，不均一分散，頑健標準誤差，補助回帰，Breusch-Pagan 検定，White 検定

次回までの準備

- 今回の講義スライドを読み直す.
- 「提出課題 7」に取り組む.
- 教科書第 8 章を読む.